

David PUSTKA¹, Radim ČAJKA², Pavel MAREK³

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ ANALÝZA SPOLEHLIVOSTI ŠTÍHLÉHO ŽELEZOBETONOVÉHO PRUTU NAMÁHANÉHO VÍCEKOMPONENTNÍM ÚČINKEM ZATÍŽENÍ METODOU SBRA

Abstract

Modern supporting reinforced concrete structures, i.e. columns, piers, frame legs, etc., are characteristic by their higher slendernesses. Effects of external forces on these structures are significantly dependent on their deformations. In the reliability assessment of these structures it is necessary to deal with the equilibrium of internal and external forces acting on deformed structure. Rapidly growing potential of computer technology allows utilize fully probabilistic methods of reliability assessment of structures. The subject of this paper is study demonstrating probabilistic reliability assessment of slender reinforced concrete column exposed to multi-component load effect represented by centric normal compressive force and bending moment. The solution is based on the fully probabilistic SBRA (Simulation-Based Reliability Assessment) method (see e.g. [1], [2], [3]).

1 ÚVOD

Štíhlé, mimostředně tlačené pruty jsou v moderním betonovém stavitelství používány čím dál častěji - ať již ve tvaru samostatných konstrukcí (sloupů, pilířů), nebo jako součást prutových systémů (např. stojky sdružených nebo patrových ráků). Jejich charakteristickým znakem je, že účinky vnějších sil jsou ovlivněny průhybem. Tím je jejich statické vyšetřování ztíženo, zvláště při větších štíhlostech, kdy podmínkou spolehlivého a hospodárního návrhu je výstižné zavedení vlivu průhybu do výpočtu. Poznatky získané z výzkumu chování betonových konstrukcí spolu s užitím teorie spolehlivosti (viz např. [9], [10]) a dostupné výkonné výpočetní techniky dovolují uvažovat o přechodu k plně pravděpodobnostním metodám navrhování a posuzování těchto štíhlých konstrukcí. Jednou z plně pravděpodobnostních metod založených na počítačové simulaci Monte Carlo je metoda SBRA, podrobně zdokumentovaná již v řadě publikací (viz např. [1], [2], [3], [16]).

Většina veličin, ovlivňujících výslednou spolehlivost stavebních konstrukcí, je náhodně proměnná. Metoda SBRA používá k popisu těchto náhodných veličin přednostně ohraničených histogramů, jež zpravidla lépe aproximují skutečná pravděpodobnostní rozdělení těchto veličin, než rozdělení parametrická. Použitím Monte Carlo simulace je možno zkoumat kombinace vstupních náhodných veličin prostřednictvím vhodného matematického modelu. Výstupem z této simulace jsou veličiny rovněž náhodně proměnné. Spolehlivost konstrukce lze ověřit pomocí funkce spolehlivosti $RF = R - E$, kde R představuje odolnost konstrukce a E účinek zatížení. Z vypočtené funkce spolehlivosti je možno přímo určit pravděpodobnost poruchy P_f . Kritérium spolehlivosti je vyjádřeno nerovností $P_f < P_d$, kde P_d je návrhová pravděpodobnost, jejíž velikost by měla být stanovena v příslušné normě (viz např. příloha A [7]).

Většina současných norem (včetně Eurokódů – viz např. [11]) je založena na metodě dílčích součinitelů, vycházející z filozofie mezních stavů. Od data vzniku této metody uplynulo již několik desetiletí. V době vzniku této metody byly dostupné pouze jednoduché výpočetní nástroje, což bylo důvodem zavedení mnoha zjednodušení, jež v obdobní výkonných počítačů není opodstatněné. Mezi

¹ Ing. David Pustka, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875, Ostrava-Poruba, tel.: +420 597 321 949, e-mail: david.pustka@vsb.cz.

² Doc. Ing. Radim Čajka, CSc., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875, Ostrava-Poruba, tel.: +420 597 321 344, e-mail: radim.cajka@vsb.cz.

³ Prof. Ing. Pavel Marek DrSc., Ústav teoretické a aplikované mechaniky, Akademie věd ČR, 190 00 Praha, Prosecká 76, tel. +420 283 882 462 e-mail: marekp@itam.cas.cz.

významné nedostatky metody dílčích součinitelů patří nemožnost přímé kvantifikace spolehlivosti vyšetřované konstrukce, komplikované nalezení kritické kombinace účinků zatížení, značná obtížnost řešení spolehlivosti při časově proměnných funkcích odolnosti a zatížení, aj. Uvedenými nedostatky netrpí pravděpodobnostní metody, jež dokáží efektivněji využít potenciálu výpočetní techniky při uvažování přesnějších matematických modelů a respektování variability vstupních veličin prostřednictvím odpovídajících pravděpodobnostních funkcí. Významná je rovněž možnost přímého vyjádření pravděpodobnosti poruchy, s níž lze pracovat dále např., při rizikových analýzách.

Potenciál pravděpodobnostní metody SBRA lze využít i pro řešení spolehlivosti štíhlých železobetonových prutových konstrukcí, jak je naznačeno v následujících odstavcích..

2 ROVNOVÁHA NA ŠTÍHLÉM MIMOSTŘEDNĚ ZATÍŽENÉM PRUTU

Rovnováhu vnitřních a vnějších sil v průřezu štíhlého prutu lze sledovat, jestliže vyjádříme ohybový moment M jako funkci nezávisle proměnné deformace y_0 volného konce prutu veřknutého v patě (viz Obr. 1). Deformace y_0 je závislá na křivosti $y'' = 1/r$ v uvažovaném průřezu (r je poloměr křivosti deformační křivky):

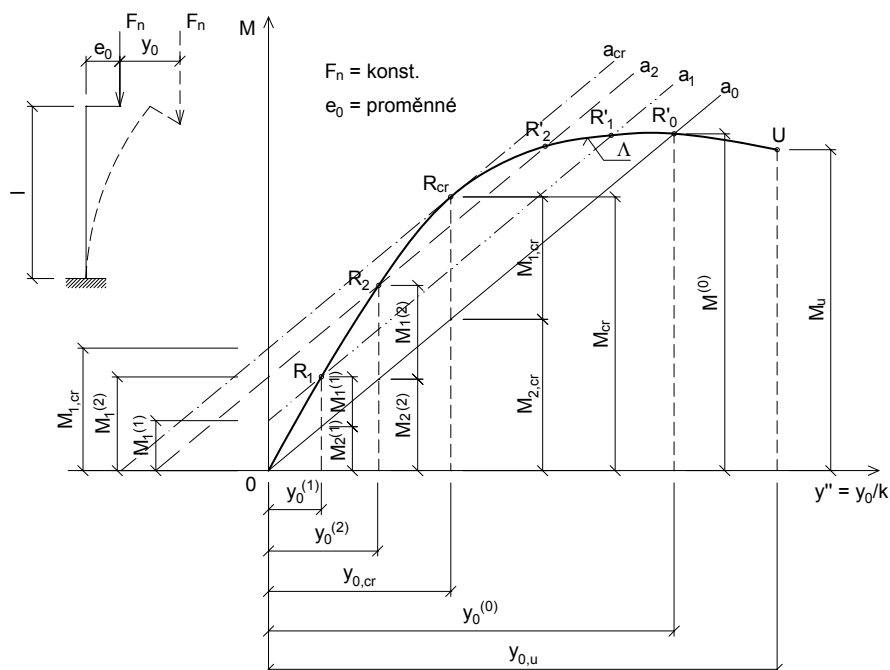
$$y_0 = f(y'') \quad (1)$$

Parametrem je zde zatížení F_n (vnější síla N).

Jestliže přibližně vyjádříme deformaci y_0 jako lineární funkci křivosti prutu y'' v uvažovaném průřezu:

$$y_0 = k \cdot y'', \quad (2)$$

kde k je konstanta závislá na tvaru deformační křivky, vztah „ $M - y''$ “ lze použít jako základ výstižného přibližného řešení (viz např. [6], [4]).



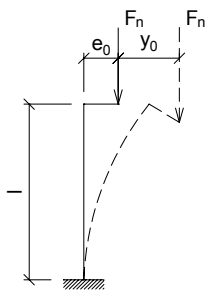
Obr. 1: Vztah $M - y''$ v patě průřezu prutu z fyzikálně nelineárního materiálu, kde $F_n = \text{konst.}$ a $y_0 = ky''$

Odchyšky v důsledku použití lineární aproximace (2) jsou relativně malé až do štíhlosti cca 150. Pro vyšší hodnoty štíhlosti se rozdíl mezi tvarem deformační křivky odpovídající různým křivostem prvku stává významným a závislost (2) přechází v obecný vztah (1), takže přímky se mění ve křivky. Jejich tvar je závislý na fyzikální nelinearitě prutu podél jeho délky, takže tvar je závislý nejen na velikosti síly F_n , ale také na její počáteční excentricitě e_0 . Vztah mezi vnitřními a vnějšími silami v průřezu v patě nehmotného prutu z fyzikálně nelineárního materiálu zatíženého konstantní normálovou silou $F_n = N$ s uvažováním lineární aproximace (2) je možno vyjádřit dle Obr. 1.

Křivka Λ znázorňuje průběh momentů vnitřních sil M_r průřezu při současném působení centrické vnitřní síly N v závislosti na křivosti y'' v místě vetknutí. Přímky $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{cr}$ znázorňují závislost celkových ohybových momentů $M = M_1 + M_2$ vnějších sil na deformaci y_0 volného konce prutu. Úseky na ose M odpovídají počátečním ohybovým momentům $M_1 = F_n \cdot e_0$. Rovnováha vnitřních a vnějších sil vznikne v průsečících čáry Λ a přímek $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{cr}$. Body $0, R_1, R_2$ znázorňují jejich stabilní rovnováhu. Při zvětšení deformace y_0 vnějším impulsem až k bodům R'_0, R'_1, R'_2 je moment vnitřních sil v okamžiku odstranění impulsu větší než moment vnějších sil, při zmenšení deformace naopak, proto se prut rozkmitá kolem rovnovážné polohy. V bodech R'_0, R'_1, R'_2 je dosaženo labilní rovnováhy, při zvětšení deformace převažuje účinek vnějších sil a deformace se zvětšuje až do porušení průřezu. Vzroste-li excentricita e_0 (a tedy i počáteční ohybový moment M_1) tak, že přímka $a'_i \equiv a_{cr}$ se dotýká křivky Λ v bodě R_{cr} , je rovnováha vnějších a vnitřních sil pouze labilní. Tuto počáteční excentricitu $e_0 = e_{cr}$ lze označit jako kritickou pro břemeno F_n . Křivka Λ je ukončena v bodě U , jehož pořadnice odpovídá momentu vnitřních sil při vyčerpání únosnosti průřezu, tedy kdy deformace jednoho z krajních vláken dosáhnou mezí hodnoty (dojde k rozdrčení betonu nebo k přetržení výztuže).

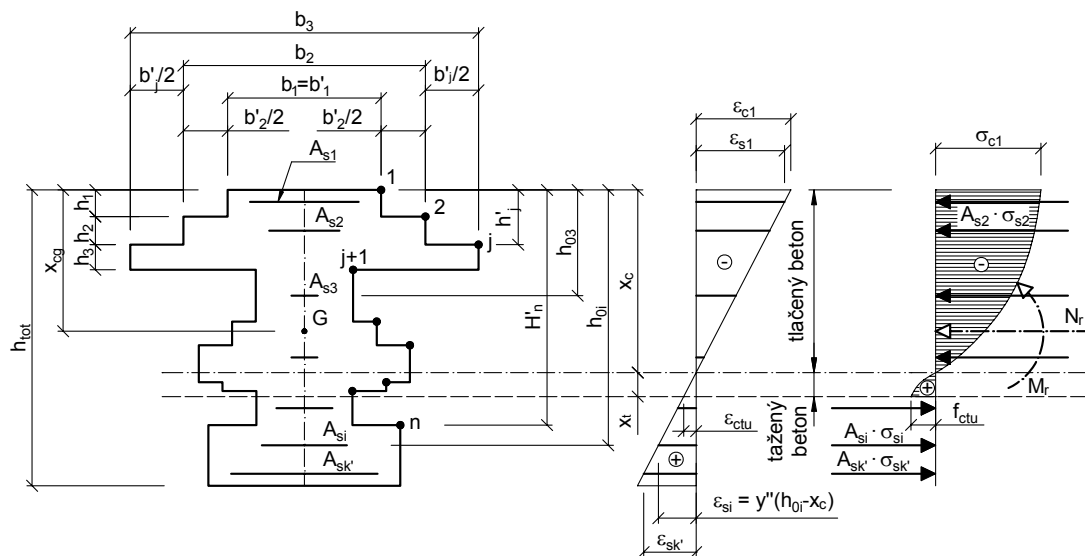
3 PŘÍKLAD PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO ŘEŠENÍ SPOLEHLIVOSTI ŠTÍHLÉHO ŽELEZOBETONOVÉHO PRUTU METODOU SBRA

Jak již bylo dříve uvedeno, při řešení štíhlých excentricky tlačенých prutů je třeba zabývat se rovnováhou vnitřních a vnějších sil na deformované soustavě. Pro analýzu spolehlivosti těchto konstrukcí je možno použít pracovních diagramů průřezů, jež vyjadřují závislost mezi vnitřním ohybovým momentem $M_r(x)$ při dané normálové síle $N_r(x) = N_r(x)$ a odpovídající křivostí ohybové čáry y'' , kde r je poloměr křivosti. Pracovní diagram průřezu je závislý na pracovních diagramech betonu a oceli. Při nižších štíhlostech postačuje uvažovat zjednodušené průběhy pracovních diagramů, při větších štíhlostech však závisí výstižnost řešení podstatně na tom, jak tvar pracovních diagramů odpovídá skutečnosti. Vyjádříme-li přibližně průhyb y_0 jako lineární funkci křivosti prutu y'' ve vyšetřovaném bodě prutu (viz předchozí kapitola), lze vztah $M_r(x, y'')$ velmi výhodně využít pro přibližné řešení úlohy. Na tomto principu je založena metoda náhradního štíhlého prutu (viz např. [4]), jež je použita k řešení dále uvedeného příkladu. S ohledem na velký rozsah řešení úlohy jsou v tomto příspěvku uvedeny pouze vybrané části řešení. Kompletní řešení úlohy lze nalézt v [17].



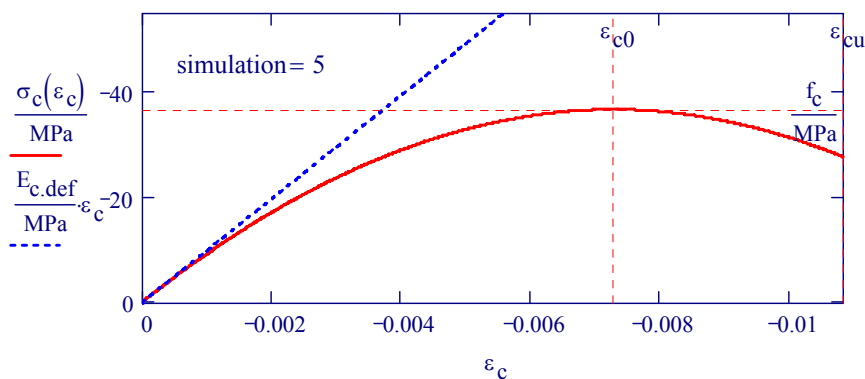
Obr. 2: Schéma vyšetřovaného prutu zatíženého mimostředně působící normálovou tlakovou silou

Předmětem řešení je štíhlý železobetonový prut vetknutý v patě a volný v hlavě (viz Obr. 2). Prut je zatížen mimostředně působící normálovou tlakovou silou. Pro možnost obecného řešení úlohy byl uvažován průřez složený z dílčích obdélníků (viz Obr. 3) s vyznačením předpokladu o jeho přetvoření a napjatosti. Vstupní veličiny jsou uvažovány jako náhodně proměnné, popsané příslušnými ohraničenými histogramy.

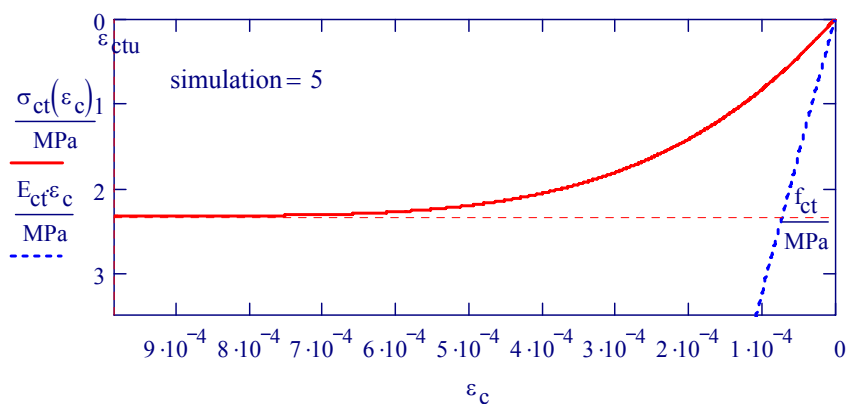


Obr. 3: Přetvoření a napětí železobetonového průřezu složeného tvaru, namáhaného mimostředním tlakem

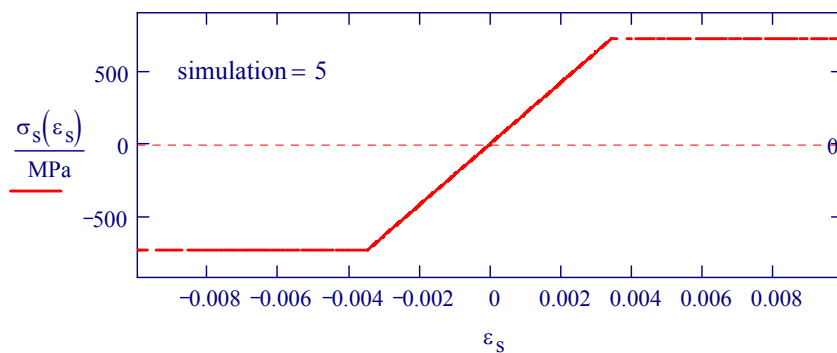
S ohledem na dostatečnou přesnost řešení jsou zde pracovní diagramy tlačeného a taženého betonu vyjádřeny pomocí hyperboly a pracovní diagram oceli pomocí zvrhlé hyperboly. Grafické vyjádření těchto pracovních diagramů, odpovídající zvolenému simulačnímu kroku, je uvedeno na Obr. 4, 5 a 6.



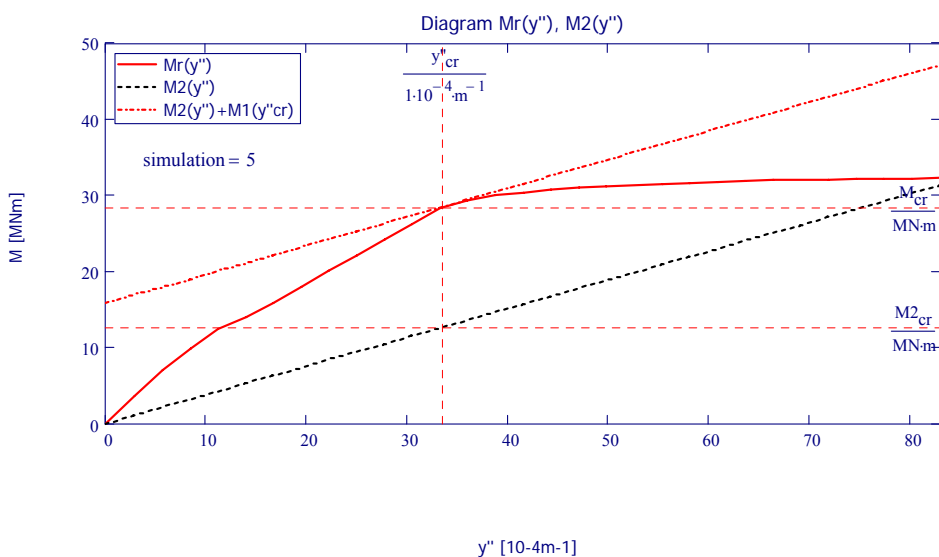
Obr. 4: Pracovní diagram tlačeného betonu



Obr. 5: Pracovní diagram taženého betonu

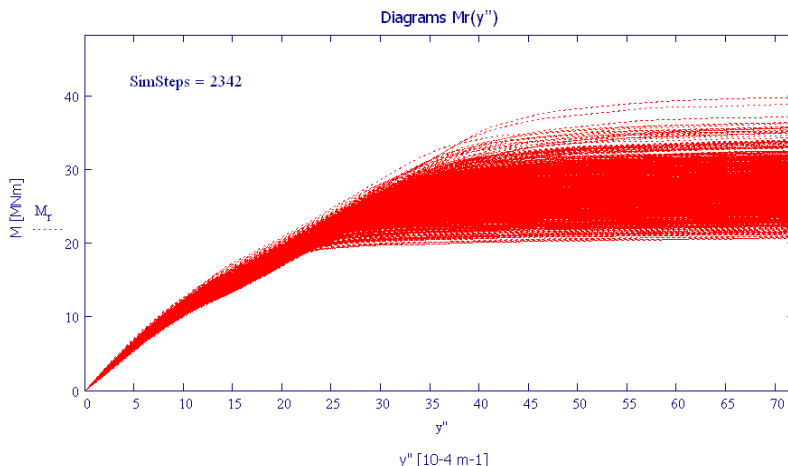


Obr. 6: Pracovní diagram výztuže



Obr. 7: Pracovní diagram průřezu $M_r(y'')$ a moment druhého řádu $M_2(y'')$ odpovídající vybranému simulačnímu kroku

Ukázka sestaveného pracovního diagramu průřezu, tj. závislost $M_r(x, y'')$, odpovídající zvolenému simulačnímu kroku, je uvedena na Obr. 7. Na tomto obrázku je rovněž vyznačena lineární závislost ohybového momentu druhého řádu $M_2(y'')$. Vedením přímky rovnoběžné s přímkou $M_2(y'')$ a dotýkající se křivky $M_r(x, y'')$ lze získat hodnotu kritické křivosti y''_{cr} a kritických momentů M_{cr} , $M_{2,cr}$ a $M_{1,cr}$. Překročením této kritické křivosti již nelze dosáhnout rovnováhy vnitřních a vnějších sil na přetvořené konstrukci. Na Obr. 8 je pro ilustraci vyznačen rozptyl získaný výpočtem pracovních diagramů průřezu pro zvolený počet simulačních kroků.

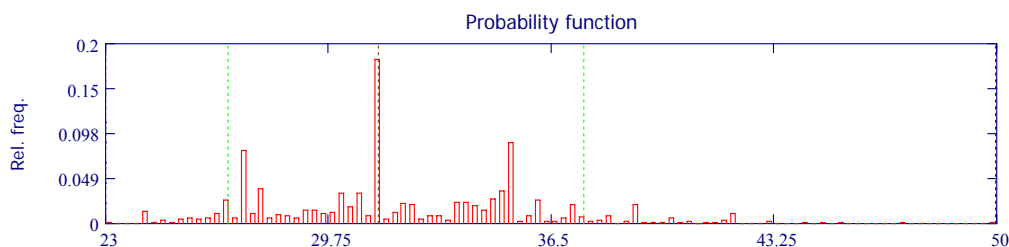


Obr. 8: Rozptyl pracovních diagramů průřezu $M_r(y'')$ pro zvolený počet simulačních kroků

Pravděpodobnostní funkce kritické křivosti y''_{cr} , vypočtená na základě pracovních diagramů průřezu získaných z jednotlivých simulačních kroků (viz Obr. 1), je uvedena na Obr. 9. Polohu neutrálné osy v průřezu reprezentuje histogram uvedený na Obr. 10.

`HisName(TableOfHistograms, item) = "n:\results\y''_cr [10-4 m-1].his"`

`his := HisData(TableOfHistograms, item)`



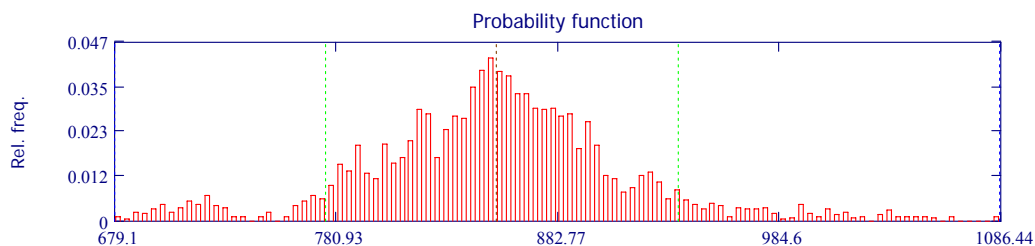
`INFO(his, P1, P2, Q) =`

"minimum"	22.99965	"skewness"	0.473305088
"maximum"	49.996	"concentration coefficient"	3.4053035229
"bins"	100	"kurtosis"	0.4053035229
"simulations"	2578	"probability(0)"	0
"mean"	31.9644697329	"quantile(7e-05)"	23.0158892044
"variance"	15.1774612857	"quantile(0,07)"	26.7395166648
"standard deviation"	3.8958261365	"quantile(0,5)"	31.2901229858
"median"	31.2901229858	"quantile(0,99993)"	49.9797607956
"variance coefficient"	0.1218798926	"quantile(0,93)"	37.4957900717

Obr. 9: Histogram kritické křivosti y''_{cr}

HisName(TableOfHistograms,item) = "n:\results\x_c_cr [mm].his"

his := HisData(TableOfHistograms,item)



INFO(his,P₁,P₂,Q) =

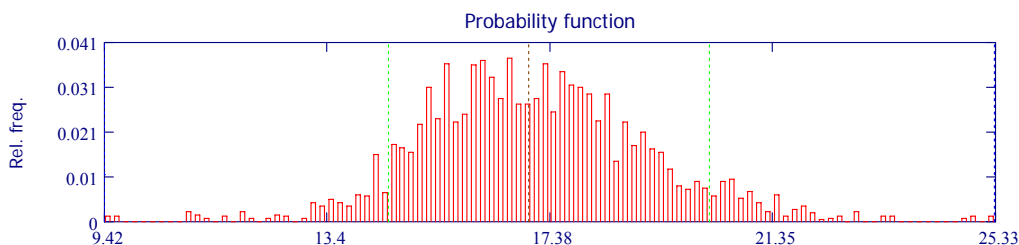
"minimum"	679.0972377	"skewness"	0.1835703213
"maximum"	1086.435035	"concentration coefficient"	4.3471258125
"bins"	100	"kurtosis"	1.3471258125
"simulations"	2578	"probability(0)"	0
"mean"	855.1578612056	"quantile(7e-05)"	679.342264963
"variance"	3604.9879847485	"quantile(0,07)"	776.4401089134
"standard deviation"	60.0415521514	"quantile(0,5)"	854.9784390886
"median"	854.9784390886	"quantile(0,99993)"	1086.190007737
"variance coefficient"	0.0702110743	"quantile(0,93)"	938.3464089397

Obr. 10: Histogram polohy neutrálné osy $x_{c,cr}$

Na základě znalosti hodnoty kritické křivosti y''_{cr} můžeme určit momentovou únosnost průřezu $M_{1,cr}$ a taktéž kritický průhyb prutu $y_{0,cr}$. Vypočtené pravděpodobnostní funkce těchto veličin jsou uvedené na Obr. 11 a 12. Spolehlivost konstrukce v pravděpodobnostním posudku lze ověřit na základě příslušné funkce spolehlivosti $RF = R - E$, kde R představuje odolnost a E účinek zatížení. Příklad vypočtené funkce bezpečnosti, odpovídající ohybové únosnosti prvního řádu, je pro provedený počet simulačních kroků uveden na Obr. 13.

HisName(TableOfHistograms,item) = "n:\results\M1_cr_opr [MNm].his"

his := HisData(TableOfHistograms,item)



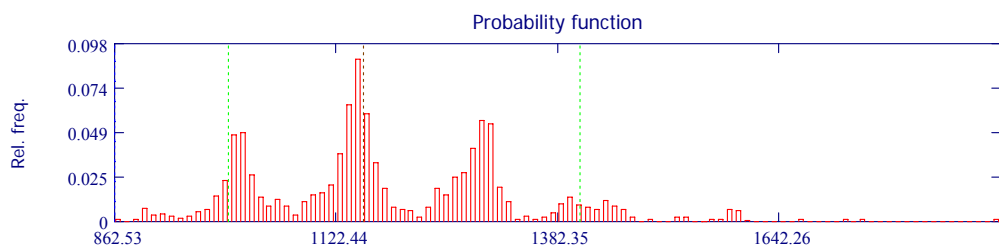
INFO(his,P₁,P₂,Q) =

"minimum"	9.423218706	"skewness"	0.2280415385
"maximum"	25.33109492	"concentration coefficient"	3.9806196997
"bins"	100	"kurtosis"	0.9806196997
"simulations"	2578	"probability(0)"	0
"mean"	17.1075621226	"quantile(7e-05)"	9.4327878238
"variance"	4.1032738273	"quantile(0,07)"	14.5086860044
"standard deviation"	2.0256539258	"quantile(0,5)"	17.0044579988
"median"	17.0044579988	"quantile(0,99993)"	25.3215258022
"variance coefficient"	0.1184069309	"quantile(0,93)"	20.2289617819

Obr. 11: Histogram kritického momentu prvního řádu $M_{1,cr}$

HisName(TableOfHistograms,item) = "n:\results\y0_cr_opr [mm].his"

his := HisData(TableOfHistograms,item)



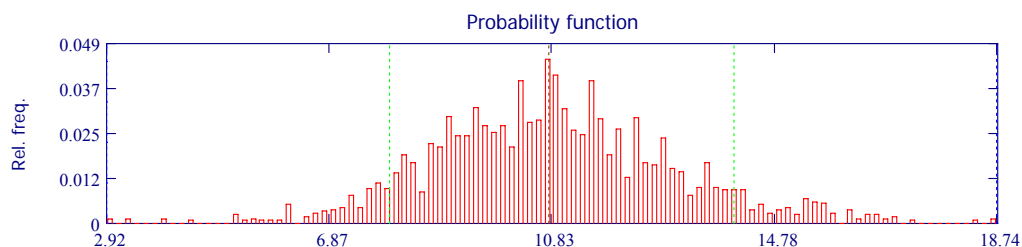
INFO(his,P₁,P₂,Q) =

"minimum"	862.5319272	"skewness"	0.6178611828
"maximum"	1902.175266	"concentration coefficient"	3.7768272867
"bins"	100	"kurtosis"	0.7768272867
"simulations"	2578	"probability(0)"	0
"mean"	1183.4381284607	"quantile(7e-05)"	863.1573073231
"variance"	20869.824653173	"quantile(0,07)"	997.2222815807
"standard deviation"	144.4639216316	"quantile(0,5)"	1155.4787969421
"median"	1155.4787969421	"quantile(0,99993)"	1901.5498858769
"variance coefficient"	0.1220713767	"quantile(0,93)"	1409.7188173526

Obr. 12: Histogram kritického průhybu pilře $y_{0,cr}$

HisName(TableOfHistograms,item) = "n:\results\RF_M1_cr_opr [MNm].his"

his := HisData(TableOfHistograms,item)



INFO(his,P₁,P₂,Q) =

"minimum"	2.91658789	"skewness"	0.1923028421
"maximum"	18.73966113	"concentration coefficient"	3.5925814261
"bins"	100	"kurtosis"	0.5925814261
"simulations"	2578	"probability(0)"	0
"mean"	10.8399089555	"quantile(7e-05)"	2.926105996
"variance"	4.5637025755	"quantile(0,07)"	7.9434463994
"standard deviation"	2.1362824194	"quantile(0,5)"	10.7703358947
"median"	10.7703358947	"quantile(0,99993)"	18.730143024
"variance coefficient"	0.1970756792	"quantile(0,93)"	14.0721297081

Obr. 13: Histogram funkce spolehlivosti ohybové únosnosti průřezu $RF_{M1,cr}$

Z Obr. 13 je zřejmé, že vypočtená pravděpodobnost poruchy je rovna nule (probability(0) = 0). Zde je potřeba poznamenat, že provedený počet simulačních kroků není (s ohledem na návrhovou pravděpodobnost P_d) dostatečný pro posudek v mezním stavu bezpečnosti. Z důvodu velké časové náročnosti výpočtu nebyl potřebný počet simulačních kroků proveden. Na optimalizaci programu pro možnost použití většího počtu simulací v přijatelném čase se pracuje. Obdobně by bylo možno provést výpočet funkce použitelnosti pro maximální kritický průhyb s následným vyčíslením odpovídající pravděpodobnosti poruchy. V tomto případě (odpovídající meznímu stavu použitelnosti) by se použitý počet simulačních kroků mohl považovat za dostačující.

4 ZÁVĚR

V příspěvku je stručně naznačen pravděpodobnostní přístup k řešení spolehlivosti štíhlých železobetonových prutů při uvažování vstupních veličin jako náhodně proměnných. Výpočtový model je založen na metodě náhradního štíhlého prutu, při uvažování výstižných pracovních diagramů materiálů vyjádřených pomocí hyperboly pro tlacený a tažený beton a zvrhlé hyperboly pro ocel výztuže. S ohledem na možnost využití programu pro výpočet v praxi často používaných průřezů, byl průřez prutu uvažován jako složený z dílčích obdélníků s vícero řadami výztuže. Řešení je možno upravit i pro jiné tvary průřezu prutu (např. kruh). Uvedenou základní úlohu je možno rozšířit na řešení systémů tvořených štíhlými železobetonovými pruty (viz např. [4]). Příklad pravděpodobnostního řešení sdružené pilířové soustavy lze nalézt v [17]. Výhodou použití pravděpodobnostního řešení je možnost aplikace přesnějších výpočtových modelů a taktéž možnost přímé kvantifikace spolehlivosti pomocí pravděpodobnosti poruchy vypočtené z odpovídající funkce spolehlivosti.

LITERATURA

- [1] Marek, P., Guštar, M., Anagnos, T. (1995): Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers, CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida.
- [2] Marek, P., Guštar, M. a Bathon, L. (1998): Tragwerksbemessung. Von deterministischen zu probabilistischen Verfahren. Academia, Praha.
- [3] Marek, P., Brozzetti, J., Guštar, M., Tikalsky, J. P. (2003): Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Background, Exercises and Software. Second Edition. Institut of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Praha.
- [4] Janda, L., Křístek, V., Kvasnička, M., Procházka, J. (1983) Štíhlé betonové tlačené pruty. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury.
- [5] CEB-FIP (1978) Model Code for Concrete Structures. Bulletin d'Information No 125-E, Paris.
- [6] CEB (1977) Design Manual on Buckling, Bulletin d'Information No 123, Decembre, Paris.
- [7] ČSN 731401 (1998): Navrhování ocelových konstrukcí. Praha: Český normalizační institut.
- [8] Pustka, D., Čajka, R., Marek, P., Kaločová, L. (2008). Multi-Component Loads Effect Analysis on a Slender Reinforced Concrete Column Using Probabilistic SBRA Method. In: Eleventh East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering & Construction (EASEC-11) "Building a Sustainable Environment". Taipei, Taiwan, November 19-21, 2008.
- [9] Teplý, B., Novák, D. (1998): Spolehlivost stavebních konstrukcí. Teorie, numerické metody, navrhování, software. Brno : CERM.
- [10] Holický, M., Marková, J. (2005): Základy teorie spolehlivosti a hodnocení rizik. Praha : ČVUT.
- [11] ČSN EN 1992-1-1 (2006): Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. Praha : Český normalizační institut.
- [12] Bradáč, J. (1996): Betonové konstrukce - 1.část: Dimenzování prvků ze železového a prostého betonu. Ostrava : EXPERT.
- [13] Martin, L., Purkiss, J. (2006): Concrete Design to EN 1992. 2nd. ed. London : Butterworth-Heinemann..
- [14] Arya, CH. (2003) Design of structural elements. Concrete, steelwork masonry and timber design to British Standards and Eurocodes. Oxon : Spon Press.
- [15] Pavelka, L., Doležalová, J. (1995): Pravděpodobnost a statistika. Ostrava : VŠB-TU.
- [16] Guštar, M. (2002): Moderní metody simulace systémů - metoda SBRA. Disertační práce. VŠB-TUO .

- [17] Pustka, D. (2008): Využití pravděpodobnostní metody SBRA při navrhování štíhlých železobetonových konstrukcí namáhaných statickým zatížením. Habilitační práce. VŠB-TU Ostrava (v tisku).
- [18] Moravčík, M., Zemko, Š. Betónové mosty 1. Všeobecná časť. Mosty zo železobetónu. ŽU Žilina, 2004.
- [19] Menčík, J. Optimální dimenzování s ohledem na spolehlivost a náklady. In: Spolehlivost konstrukcí IX, Praha, 2008.
- [20] Kohoutková, A., Trtík, K., Vašková, J., Vodička, J. Betonové konstrukce 1. Praha: ČVUT, 2005.
- [21] ČSN EN 1992-1-1 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. Praha: Český normalizační institut, 2006.
- [22] Bujňák, J., Furtak, K., Vičan, J. Navrhovanie konštrukcií podľa Eurokódov. Žilina: Žilinská univerzita, 2003. ISBN 80-8070-078-8.
- [23] Hájek, J. Pretvorenia betónových konštrukcií. VEDA Bratislava, 1994.
- [24] Haldar A., Mahadevan S. Probability, reliability and statistical methods in engineering design. John Willey & Sons, Inc, New York, 2001, ISBN 0-471-33119-8.
- [25] Harvan, I. Železobetónové nosné sústavy. Navrhovanie podľa Európskych noriem. Bratislava: STU Bratislava, 2006. ISBN 80-227-2414-9.
- [26] Majdúch, D., Harvan, I., Fillo, Ľ. Riešenie betónových konštrukcií v praxi. ALFA Bratislava, 1991.
- [27] Web page www.anthill-sbra.com

Oponentní posudek vypracoval: Ing. Kamil Burkovič